Universidade Católica de Pelotas
Centro Politécnico
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Prof. Dr. Wermerson D. Pereira

Universidade Católica de Pelotas
Centro Politécnico
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação

VALOR ESPERADO PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Extraído do livro:"*Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB*", Capítulo 11.

Douglas Adalberto Scheunemann
Juliano Rosinha Barboza

Outubro/2015

Revisando conceitos

Variáveis aleatórias contínuas

- Uma variável aleatória **X** é contínua se existe uma função $f_x \geq 0$, tal que:

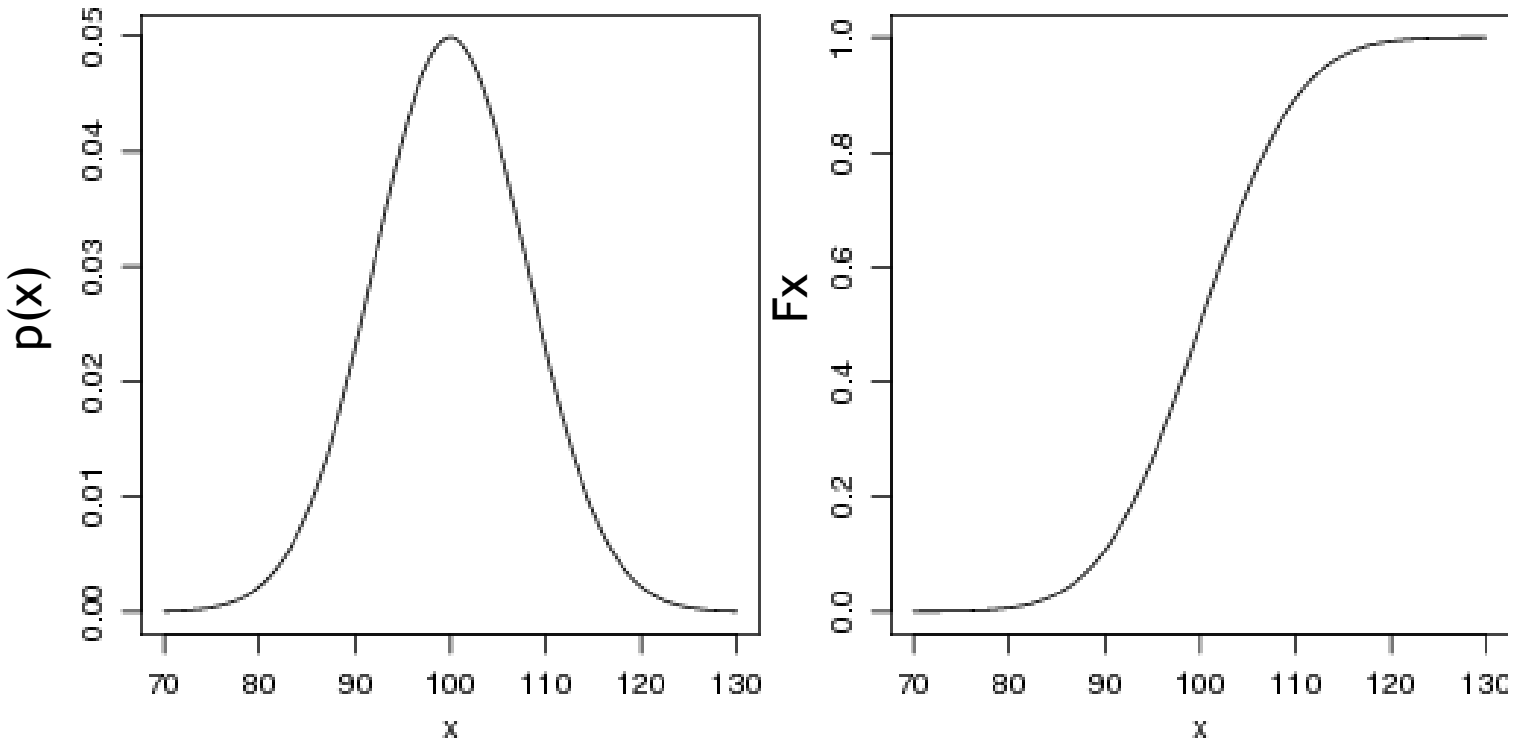
$$p_X = \int_{-\infty}^{x} f_x(t) \, . \, dt \forall x \in IR$$

- Neste caso, **X** pode assumir uma quantidade não-enumerável de valores e a função $\boldsymbol{p_X}$é chamada de função densidade de probabilidade de **X**.

- **Exemplos**de Variáveis Aleatórias Contínuas são: *peso*, *comprimento*, *voltagem*, *corrente*, *pressão*, *temperatura*, *tempo*.

Conceitos importantes

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x).dx = 1$$



Funções de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição acumulada (direita).

Determinando o valor esperado

Determinando o valor esperado

- Seja uma variável aleatória contínua ➔ *X*;
- Com função densidade de probabilidade (PDF) conhecida ➔ *p(x)*;
- Definimos o valor esperado E[X], também conhecido como esperança matemática ou média, pela equação:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, p(x) . \, dx$$

Determinando o valor esperado

- A interpretação de **E[X]** para o caso contínuo é similar ao mencionado para variáveis aleatórias discretas;

- Se a variável é limitada, o cálculo é feito sem ambiguidade e a existência do valor esperado está assegurada;

Exemplo 01:

- Seja **X** o tempo (em minutos) durante o qual um equipamento elétrico é utilizado em carga máxima, em um certo período de tempo especificado. Então, **X** é uma variável aleatória contínua e sua FDP é dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1500)^2}\, x, se\ 0 \leq x \leq 1500; \\ \dfrac{-1}{(1500)^2}\,(x - 3000), se\ 1500 \leq x \leq 3000; \\ 0, para\ quaisquer\ outros\ valores. \end{cases}$$

Exemplo 01:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1500)^2}x, se\ 0 \leq x \leq 1500; \\ \dfrac{-1}{(1500)^2}(x - 3000), se\ 1500 \leq x \leq 3000; \\ 0, para\ quaisquer\ outros\ valores. \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.p(x).dx =$$

$$\mathrm{E[X]} = \frac{1}{(1500)^2}\left[\int_0^{1500} \mathrm{x^2 dx} - \int_{1500}^{3000} \mathrm{x(x-3000)dx}\right]$$

$$\mathrm{E[X]} = 1500\ \text{minutos}$$

Exemplo 02:

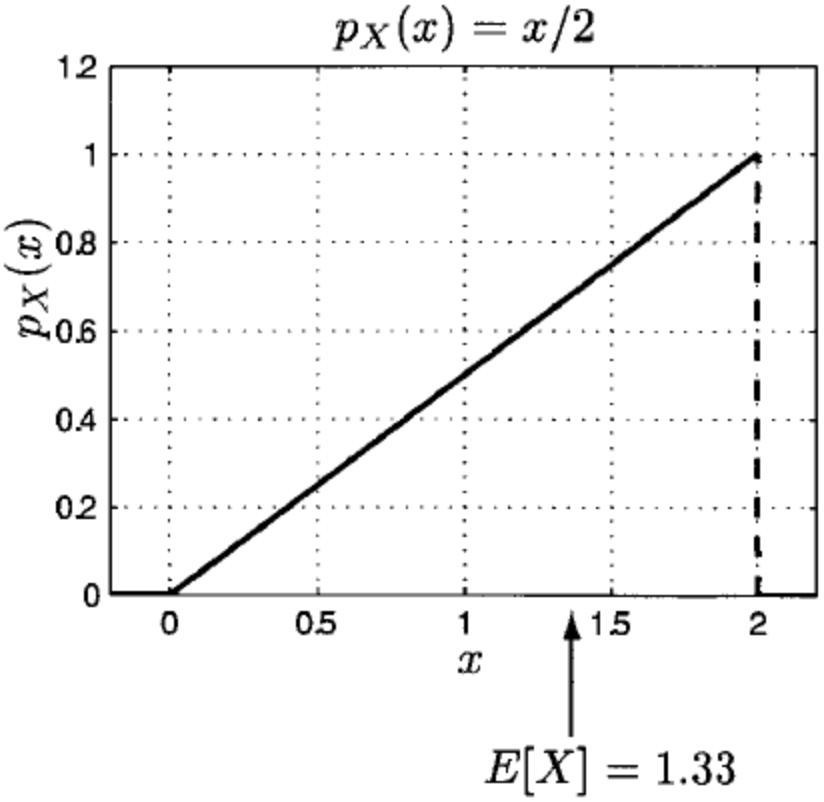
- Seja a função de densidade de uma variável aleatória de **X** dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, se\ 0 \leq x \leq 2; \\ 0\ caso\ contrário. \end{cases}$$

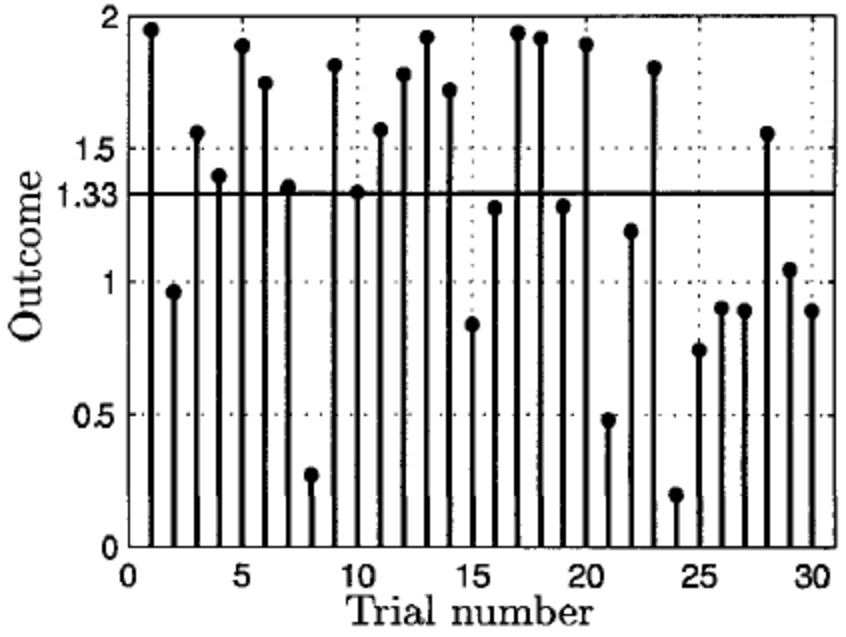
$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x.p(x).dx = \int_{0}^{2} x.p(x).dx = \int_{0}^{2} x.\frac{1}{2}x.dx = \frac{4}{3}$$

$$E[X] = 1{,}33$$

Exemplo 02:



(a) PDF



(b) Typical outcomes and expected value of 1.33

Determinando o valor esperado

- No caso não limitado, podem aparecer situações indefinidas do tipo , em que pode ser afirmado o valor esperado **E[X]** não existe;

- Assim **E[X]** vai estar bem definido se a integral, em pelo menos um desses intervalos, for finita; isto é:

$$\int_{-\infty}^{0} x \,.\, p(x) . \, dx \; < \infty \;\; e \int_{0}^{+\infty} x \,.\, p(x) . \, dx < \infty$$

Determinando o valor esperado

Nem todas as PDFs apresentam valor esperado

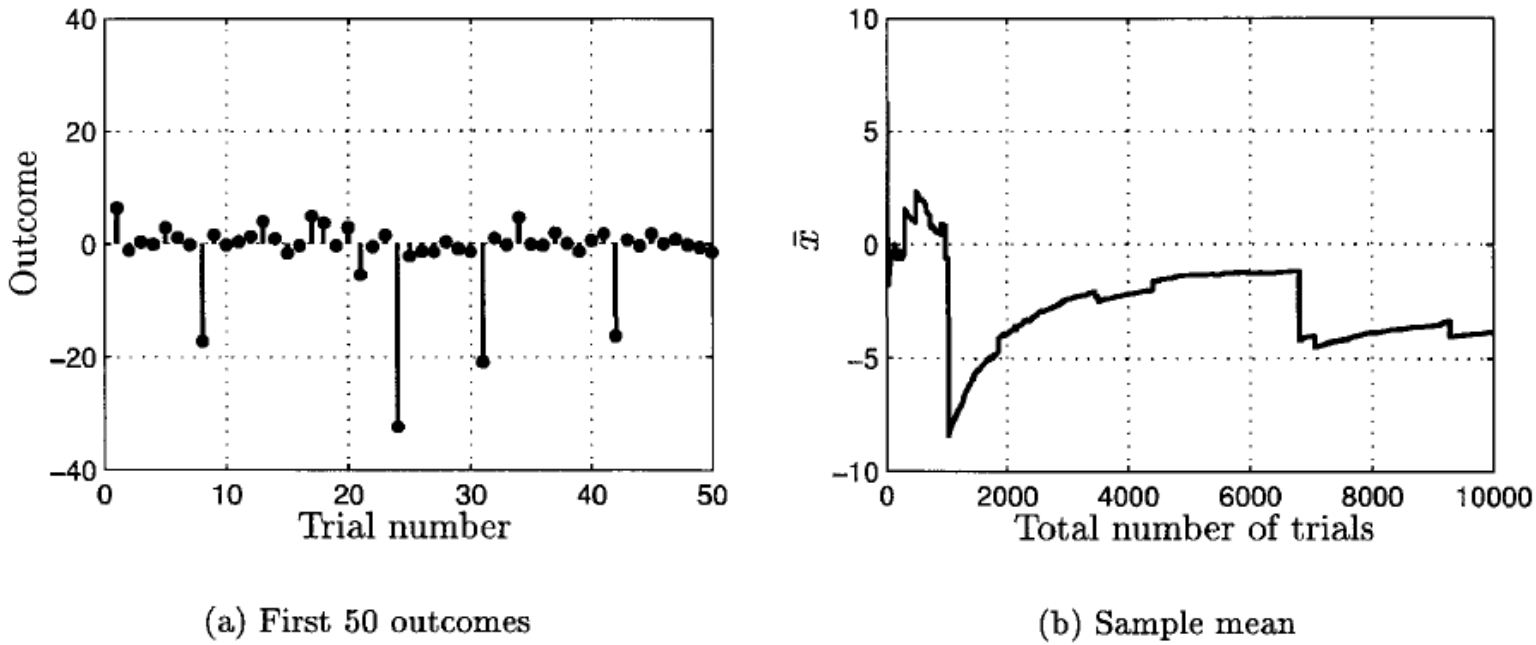
Exemplo: PDF Cauchy

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Exemplo 03:

$$E[X] = \lim_{L \to -\infty} \int_{L}^{0} x.p(x).dx + \lim_{U \to +\infty} \int_{0}^{U} x.p(x).dx =$$

$$\boldsymbol{E[X] = -\infty + \infty = ?}$$



(a) First 50 outcomes

(b) Sample mean

Valores esperados para importantes PDFs

Distribuição Exponencial

$$\mathrm{E}[\mathrm{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \,.\, p(x).\, dx$$

Se X ~ exp(λ), então:

- $p(x) = \lambda . \exp(-\lambda x)$
- $x \geq 0$

$$E\,[X] = \int_{0}^{\infty} x . \lambda . \exp(-\lambda x)\, dx =$$

$$E\,[X] = \left[-x . exp(-\lambda x) - \frac{1}{\lambda} exp(-\lambda x)\right]_{0}^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

Outros E[X] para PDFs importantes

	Values	PDF	$E[X]$
Uniform	$a<x<b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{1}{2}(a+b)$
Exponential	$x \geq 0$	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}$
Gaussian	$-\infty<x<\infty$	$\frac{\exp[-(1/(2\sigma^2))(x-\mu)^2]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$	μ
Laplacian	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\exp(-\sqrt{2/\sigma^2}\lvert x\rvert)$	0
Gamma	$x \geq 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$
Rayleigh	$x \geq 0$	$\frac{x}{\sigma^2}\exp[-x^2/(2\sigma^2)]$	$\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$

Valor esperado para uma Função de Variáveis Aleatórias

Valor esperado para um Função de V.A.

$$Y = g(X)$$

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy$$

E[Y] pode ser determinado em função de g(x) como segue

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_x(x) dx$$

Exemplo – Função Afim

$$Y = aX + b$$

$$g(x) = ax + b$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)\, p_x(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xp_x(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} p_x(x)dx$$

$$= aE[X] + b$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

Variância e Momento para uma variável aleatória contínua

Variância e Momentos

Momentos:

$E[X]$ → Momento de primeira ordem (Média)

$E[X^2]$ → Momento de segunda ordem

$E[X^n]$ → Momento de ordem "n"

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx$$

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_x(x) dx$$

Momentos centrais:

$$E[(X - E[X])^n]$$

$$\text{var}(X) = E[(X - E[x])^2]$$

Relembrando para variável discreta:

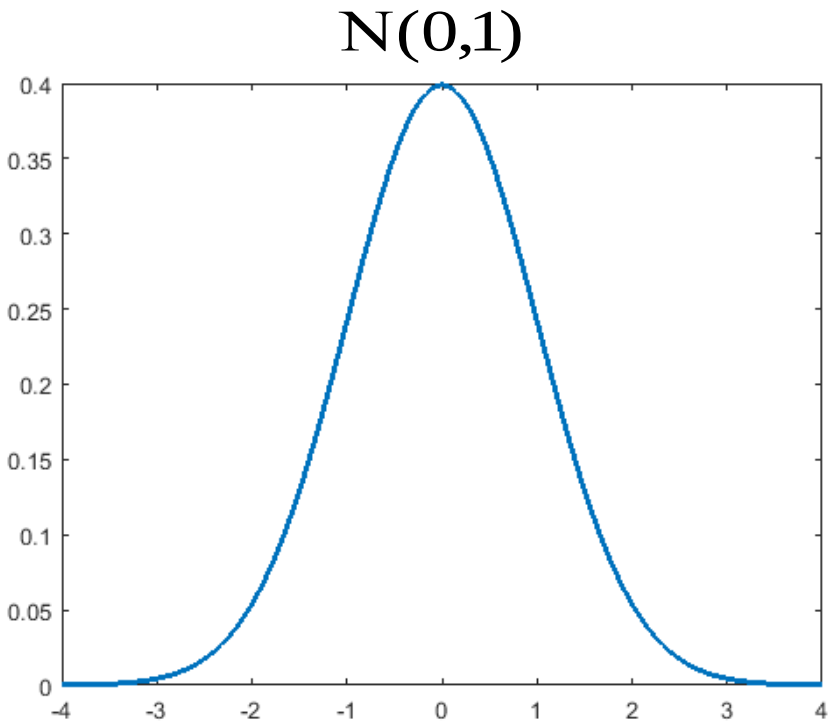
$$\text{var}(X) = \sum_i (x - E[X])^2 p_x[x_i]$$

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 p_x(x) dx$$

Variância Distribuição Gaussiana

$$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$\mathrm{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2$$

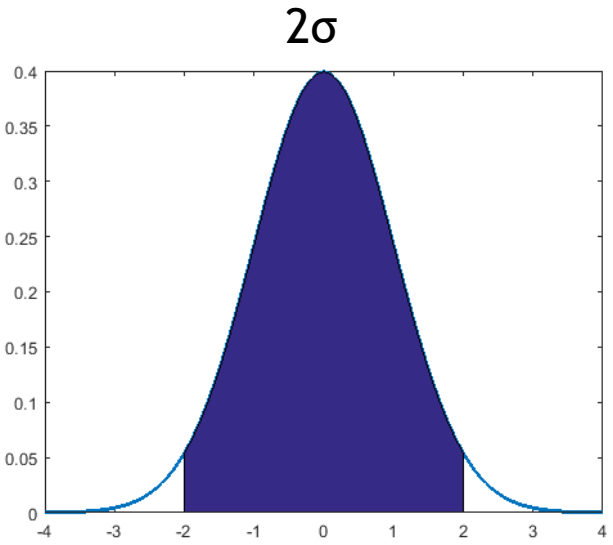
Desvio Padrão

O desvio padrão indica o quanto os valores de uma variável aleatória estão próximos de E[X].

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

É comum representar critérios de aceitação em processos como função de k*σ.
Exemplo para distribuição Gaussiana:

$$p = \int_{-2\sigma}^{2\sigma} p_x(x)dx = 0{,}6827$$

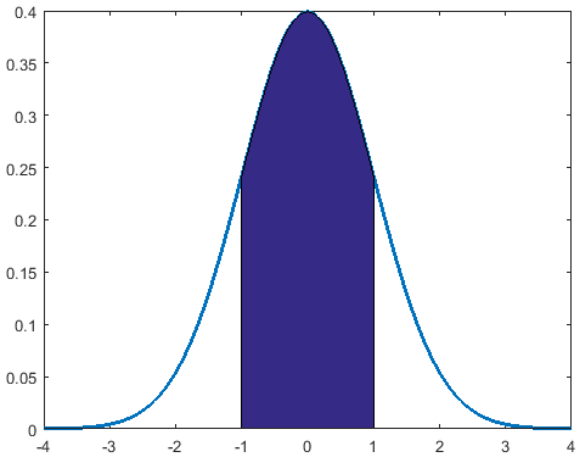


Cálculo no MATLAB

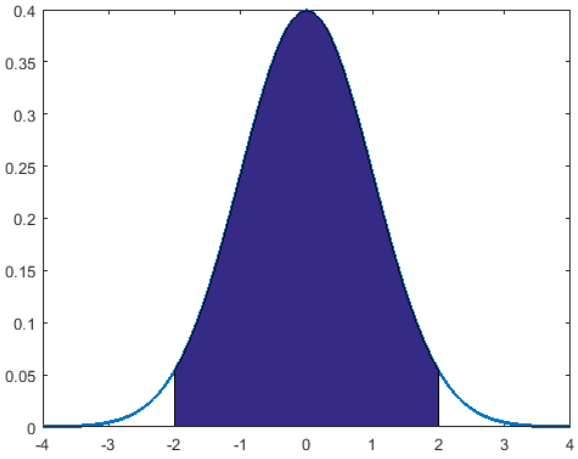
```
dp = 1; mi = 0;
pdf =@(x) 1/sqrt(2*pi*dp^2)*...
    exp(-(x-mi).^2./(2*dp^2));
pr = 4*dp; % plot range
x = -pr:2*pr/1000:pr;
plot (x,pdf(x), 'LineWidth',2)
n_dp = 2*dp;
x_dp = -n_dp:2*n_dp/1000:n_dp;
hold on; area(x_dp, pdf(x_dp));
p_1_dp = integral(pdf,-dp,dp);
p_2_dp = integral(pdf,-2*dp,2*dp);
p_3_dp = integral(pdf,-3*dp,3*dp);
```

Resultados:
P_1_dp = 0,6827
P_2_dp = 0,9545
P_3_dp = 0,9973

1σ



2σ



Propriedades das principais PDFs

	Values	PDF	$E[X]$	$\mathrm{var}(X)$	$\phi_X(\omega)$
Uniform	$a<x<b$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{1}{2}(a+b)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{\exp(j\omega b)-\exp(j\omega a)}{j\omega(b-a)}$
Exponential	$x \geq 0$	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-j\omega}$
Gaussian	$-\infty<x<\infty$	$\frac{\exp[-(1/(2\sigma^2))(x-\mu)^2]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$	μ	σ^2	$\exp[j\omega\mu-\sigma^2\omega^2/2]$
Laplacian	$-\infty<x<\infty$	$\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}}\exp(-\sqrt{2/\sigma^2}\lvert x\rvert)$	0	σ^2	$\frac{2/\sigma^2}{\omega^2+2/\sigma^2}$
Gamma	$x \geq 0$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\frac{1}{(1-j\omega/\lambda)^\alpha}$
Rayleigh	$x \geq 0$	$\frac{x}{\sigma^2}\exp[-x^2/(2\sigma^2)]$	$\sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}}$	$(2-\pi/2)\sigma^2$	[Johnson et al 1994]

Funções características

Funções Características

- Como visto no capítulo que abordou Variáveis Aleatórias Discretas, a função característica é uma valiosa ferramenta para o cálculo dos momentos, por simplificação matemática.

$$\emptyset_X(w) = E[exp(j\omega X)]$$

- A função característica sempre existe, mesmo que os momentos de uma determinada PDF não.

Funções Características

- Para uma variável aleatória contínua, a função característica é obtida a partir de:

$$\boldsymbol{E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x).p(x).dx}$$

- Para as partes reais e imaginária de $E[exp(j\omega x)]$, que são:

→ REAL: $E[\cos(\omega X)]$

→ IMAGINÁRIA: $E[\sin(\omega X)]$

Funções Características

- Resultando em:

$$\emptyset_X = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{p(x).exp(j\omega x).dx}$$

- A função característica é vista como a transformada de Fourier da PDF, embora com um **+**j na definição , em oposição ao **-**j (mais comum).

Funções Características

- Uma vez que a função característica tenha sido encontrada, os momentos são dados através da fórmula:

$$E[X^n] = \frac{1}{j^n} \frac{d^n \emptyset_X(\omega)}{d\omega^n}, \ \omega = 0$$

Exemplo:

- Utilizando a definição da PDF exponencial:

$$\emptyset_X(\omega) = \int_0^{+\infty} \lambda . exp(-\lambda x)\, exp(j\omega x) . dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda . exp[-(\lambda - j\omega)x] . dx$$

$$\emptyset_X(\omega) = \lambda \frac{exp[-(\lambda - j\omega)x]}{-(\lambda - j\omega)} \Bigg|_0^{\infty}$$

- Considerando:
  - $\lambda > 0$;
  - $exp[-(\lambda - j\omega)x] \to 0$, se $x \to \infty$, obtém-se:

Funções Características

$$\emptyset_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - j\omega}$$

- Calculando o momento:

$$E[X^n] = \frac{1}{j^n}\frac{d^n \emptyset_X(\omega)}{d\omega^n}, \ \omega = 0$$

$$E[X^n] = \lambda n! \, (\lambda - j\omega)^{-n-1}, \ \omega = 0$$

$$E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Funções Características

Fórmula momento só é válida se existirem momentos de ordem superior.

Funções Características

- Só porque uma PDF tem sua função característica, e todas têm, não significa que o valor médio exista;
- Portanto, não existindo a média, não existirão todos os momentos de ordem superior.

Exemplo: PDF Cauchy

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} \qquad -\infty < x < +\infty$$

Funções Características

- A função característica tem quase as mesmas propriedades que um aleatória discreta variável:

1. A função característica sempre existe;

2. A PDF pode ser recuperada a partir da função característica de Fourier inversa que neste caso é:

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \emptyset_X(\omega) exp(-j\omega x) d\omega$$

Funções Características

3. Convergência de uma sequência de funções características $\emptyset x^{(n)}(\omega)$para n = 1, 2, ...
dada por uma função característica $\emptyset(\omega)$garante que a sequência correspondente de PDFs$p^{(n)}(x)$para n = 1, 2, convirja para $p(x)$ dado por:

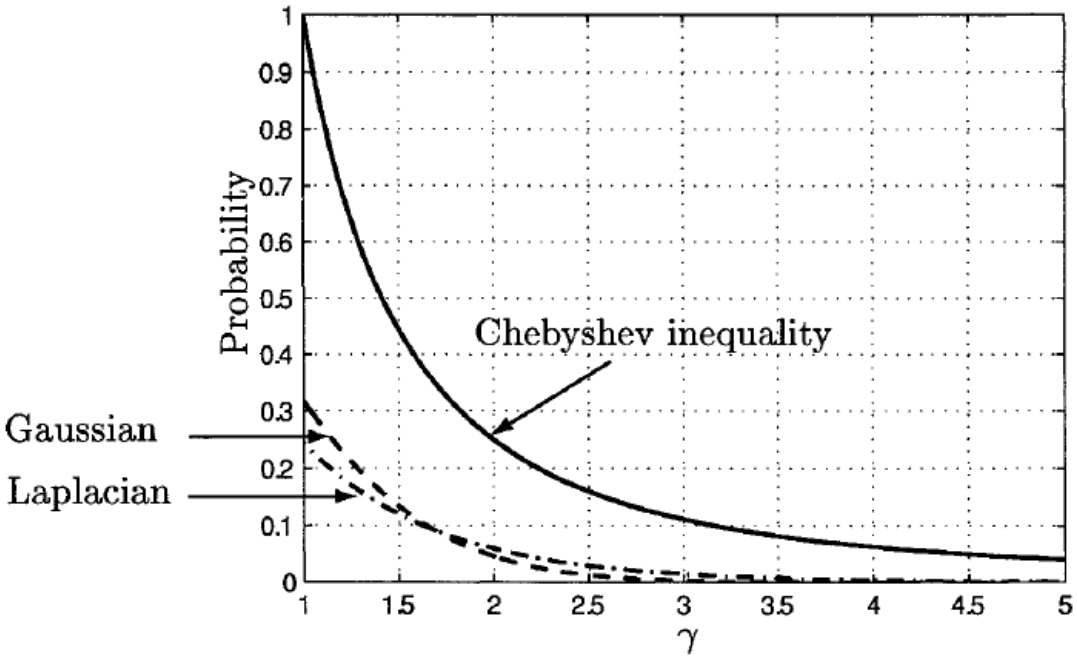
$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \emptyset(\omega) exp(-j\omega x) d\omega$$

Probabilidade, Momento e a Desigualdade de Chebyshev

Desigualdade de Chebyshev

Utilizada para determinar a probabilidade **máxima** "B" para uma variável aleatória assumir valores E[X]±γ.
Sua principal vantagem é que não é necessário conhecer a PDF, apenas a variância e a média.

$$P[|X - E[X]| > \gamma] \leq B \qquad P[|X - E[X]| > \gamma] \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\gamma^2}$$



Estimando a Média e a Variância

Média e Variância

- A média e a variância para variáveis aleatórias contínuas são estimadas exatamente da mesma forma que é feita para variáveis aleatórias discretas.

- Para **M** realizações $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_M\}$ de uma variável aleatória **X**, **temos**:

Média e Variância

- **Média:**

$$\widehat{E[X]} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i$$

- **Variância:**

$$var(X) = \widehat{E[X^2]} - \left(\widehat{E[X]}\right)^2$$

$$var(X) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} {x_i}^2 - \left(\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i\right)^2$$

Universidade Católica de Pelotas
Centro Politécnico
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica e Computação

VALOR ESPERADO PARA VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Extraído do livro:"*Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB*", Capítulo 11.

Douglas Adalberto Scheunemann
Juliano Rosinha Barboza

Outubro/2015